**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**Факультет прикладной математики и информатики**

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

Кендысь Алексей Максимович

**Копулы и их свойства**

Курсовой проект

студента 3 курса 7 группы

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| “Допустить к защите”  **Руководитель работы**  Труш Николай Николаевич,  профессор кафедры ТВиМС,  доктор физико-математических наук  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  “\_\_” \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2022 г. | | **Научный руководитель**  Труш Николай Николаевич,  профессор кафедры ТВиМС, доктор физико-математических наук |
|  |  | |

Минск, 2022

Белорусский государственный университет

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

**ЗАДАНИЕ**

**ПО ПОДГОТОВКЕ КУРСОВОГО ПРОЕКТА**

Студенту 3 курса Кендысю Алексею Максимовичу.

Курсовой проект, 20 стр., 24 рис., 11 источников.

1. Тема: "Копулы и их свойства".
2. Цели курсового проекта:

* Определение понятия копулы;
* Приведение основных элементов теории копул;
* Разбор важных свойств;
* Классификация копул;
* Приведение примеров копул;
* Реализация копул на языке R;
* Анализ различных типов копул и их характерных особенностей.

1. Рекомендованная литература:

* Nelson, Roger B. An Introduction to Copulas / Roger B. Nelson. – Second Edition. – Springer, New York, 2006. – 270 с.
* Cherubini Umberto, Luciano Elisa, Vecchiato Walter Copula Methods in Finance/ U. Cherubini, E. Luciano, W. Vecchiato. – John Wiley & Sons, Ltd*,* 2004. – 293 с.
* Elements of Copula Modeling with R / Marius Hofert [и др.]. – Springer, 2018. – 267 с.

Руководитель курсовой работы: Н.Н. Труш

Задание принял к исполнению: А.М. Кендысь

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

[ВВЕДЕНИЕ 4](#_Toc121584431)

[Глава 1. Теория копул 5](#_Toc121584432)

[1.1 Определение копулы 5](#_Toc121584433)

[1.2 Теорема Склара 5](#_Toc121584434)

[1.3 Основные свойства копул 6](#_Toc121584435)

[1.4 Копулы в языке R 7](#_Toc121584436)

[Глава 2. Типы копул 11](#_Toc121584437)

[2.1 Эллиптические копулы 11](#_Toc121584438)

[2.1.1 Гауссовская копула 11](#_Toc121584439)

[2.1.2 t-копула Стьюдента 12](#_Toc121584440)

[2.2 Архимедовы копулы 13](#_Toc121584441)

[2.2.1 Копула Франка 14](#_Toc121584442)

[2.2.2 Копула Клейтона 15](#_Toc121584443)

[2.2.3 Копула Гумбеля 16](#_Toc121584444)

[2.3 Экстремальные копулы 17](#_Toc121584445)

[Заключение 19](#_Toc121584446)

[Список Использованных источников 20](#_Toc121584447)

# ВВЕДЕНИЕ

Изучение копул и их приложений в статистике — достаточно современное явление. Сейчас наиболее популярно применение копул в таких направлениях, как управление финансами, анализ страховых рисков, моделирование макроэкономических процессов. Анализ публикаций, информацию о которых можно найти в Интернете, показывает, что практически во всех областях, где используются статистические данные, появляются работы с привлечением копул для моделирования зависимостей. Копулы находят широкое применение в исследовании финансовых рынков, где важно следить за динамикой курсов акций различных компаний, а также за существующей между ними корреляцией. Кроме того, они могут быть применимы к оценке состояния какого-либо экономического сектора или экономики страны в целом.

Склар ввёл копулы в 1959 г. как мощный инструмент для моделирования зависимости между переменными. Название “копула” (“copula”) — это латинское слово, означающее связь. Копулы – это функции, которые позволяют “связывать” многомерные функции распределения с их одномерными маргинальными функциями распределения. С другой стороны, это многомерные функции распределения, одномерные маргинальные функции которых равномерны на интервале (0,1). Эти и другие свойства копул в подробностях рассматриваются в данной работе.

В первой главе работы исследуются основные элементы теории копул, а также их важные свойства. Во второй главе подробно изучается классификация копул: по отдельности рассматриваются эллиптические, архимедовы и экстремальные копулы, их примеры.

Глава 1. Теория копул

1.1 Определение копулы

Функция , принимающая значения на , называется *копулой* двух переменных и , где (т.е. действует из в ), если она удовлетворяет следующим условиям:

1. .
2. .
3. *,* где и .

Аналогичное определение можно привести и для копулы размерности [1, c. 45].

1.2 Теорема Склара

Рассмотрим теорему, которую привёл и доказал Эйб Склар в 1959 г. Он же первым и ввёл понятие и название “копула” в теорию вероятностей.

*Теорема (Склара)*. Функцию распределения случайного вектора со значениями в обозначим . Пусть – маргинальные функции распределения отдельных компонент. Тогда существует такая -мерная копула , что для любых :

Если функции непрерывны, то такая копула единственна.

Справедливо и обратное. Если – -мерная копула и – функции распределения, тогда функция , заданная в (1), является -мерной совместной функцией распределения с маргинальными функциями , .

К тому же в случае непрерывного случайного вектора можно записать и выражение для совместной плотности распределения с маргинальными плотностями распределения :

где – *плотность копулы*, которая определяется следующим соотношением:

Из теоремы следует равенство:

Следовательно, получаем аналитический вид копулы.

Таким образом, копула – это многомерная функция распределения, определённая на -мерном единичном кубе , такая что каждое её маргинальное распределение равномерно на . Копула позволяет перейти от одномерных распределений двух случайных величин (для ) к их совместному распределению.

1.3 Основные свойства копул

Рассмотрим основные *свойства копул* для двумерного случая:

1. Для любой копулы справедливо:

Эти пределы называются нижней и верхней границами Фреше-Хефдинга и также являются копулами.

1. Для любых справедливо неравенство:

Т.е. для копул выполняется условие Липшица.

1. Анализируемые случайные величины с функциями распределения независимы тогда и только тогда, когда

Представленная копула называется копулой независимости (product copula). Обычно её записывают как . Для -мерного случая аналогично:

1. Если случайные величины связаны линейным соотношением, то им будет соответствовать копула , т.е. верхняя граница Фреше-Хефдинга.
2. Пусть случайные величины непрерывны, и обозначим – копула для и. Тогда если функции и строго возрастающие на множестве значений и соответственно, то:
3. Пусть случайные величины непрерывны, и – копула для и. Если функции и строго монотонны на множестве значений и соответственно, то:
4. Если строго возрастает, а строго убывает, тогда:
5. Если строго убывает, а строго возрастает, тогда:
6. Если и строго убывают, тогда:

1.4 Копулы в языке R

В языке R для работы с копулами используется библиотека *copula*. Эта библиотека включает огромное количество различных функций. Здесь остановимся на самых основных.

Попробуем изобразить графики уже рассмотренных копул: нижние и верхние границы Фреше-Хефдинга (6) и копулу независимости (8). Подключим библиотеку и зададим переменную , отвечающую за размерность:

library(copula)  
n <- 2

Для изображения копул используют три основных графика: график распределения копулы или её плотности, график линий уровня и точечная диаграмма.

Рассмотрим нижнюю границу Фреше-Хефдинга. Для задания объекта данной копулы используется функция *lowfhCopula*. Далее можем нарисовать график распределения копулы с помощью функции *persp*, выбрав параметр *pCopula*, который отвечает за функцию распределения (в отличие от *dCopula*, который задаёт плотность). Для графика линий уровня используется функция *contour*. Чтобы нарисовать точечную диаграмму, используется функция *rCopula*, которая генерирует случайные числа, основываясь на некоторой копуле (т.е. независимые наблюдения), а далее для построения графика используется функция *plot*. Код приведён ниже:

cLowFH <- lowfhCopula(dim = n)  
  
persp(cLowFH, pCopula, xlab = "u", ylab = "v", zlab = "Copula")

contour(cLowFH, pCopula, xlab = "u", ylab = "v")

matr <- rCopula(2000, cLowFH)  
plot(matr, xlab = "u", ylab = "v")

В результате получаем три графика, приведённые на рис. 1.1 – 1.3.

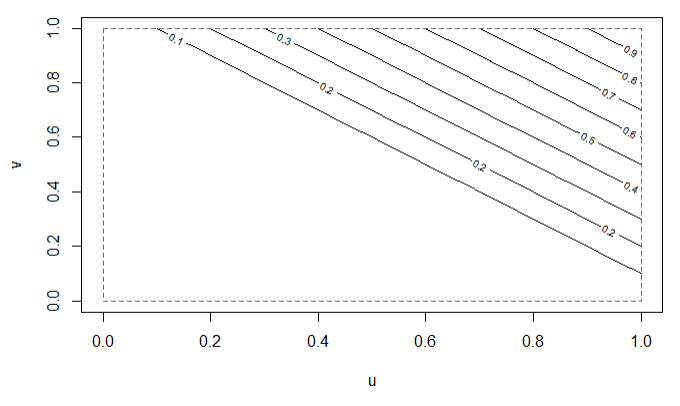
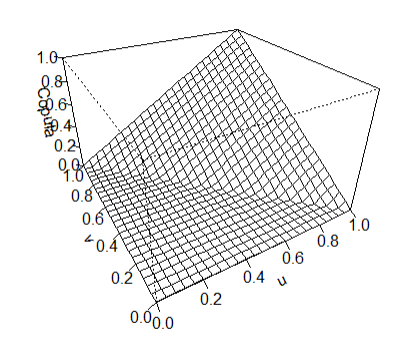


Рис. 1.1-1.2 – распределение и линии уровня нижней границы Фреше-Хефдинга

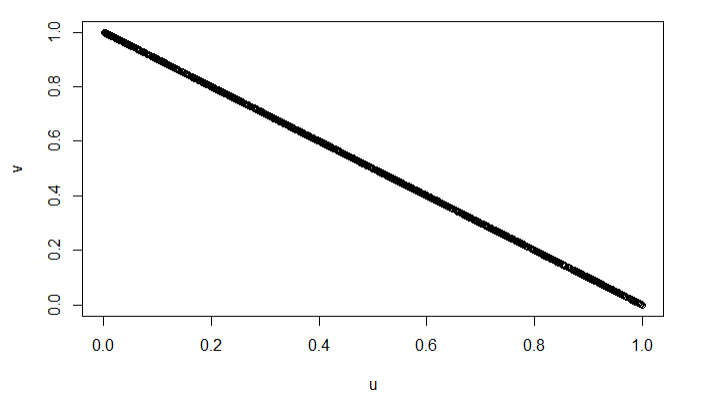


Рис. 1.3 – точечная диаграмма нижней границы Фреше-Хефдинга для 2000 наблюдений

Верхняя граница Фреше-Хефдинга задаётся с помощью функции *upfhCopula*. На рис. 1.4-1.6 представлены аналогичные графики для данной копулы.

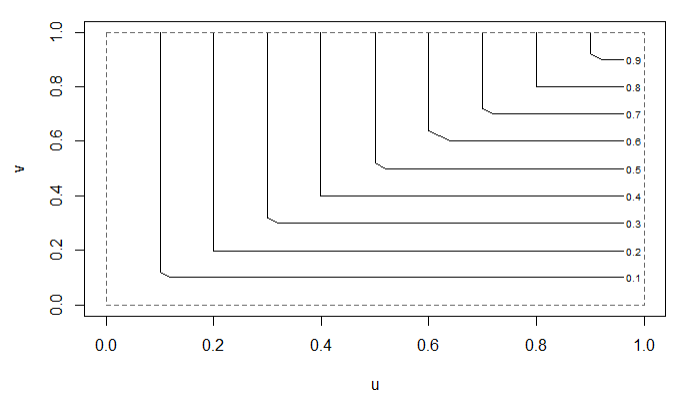
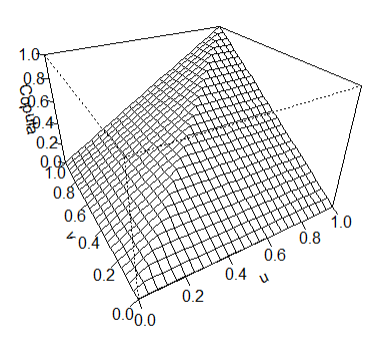


Рис. 1.4-1.5 – распределение и линии уровня верхней границы Фреше-Хефдинга

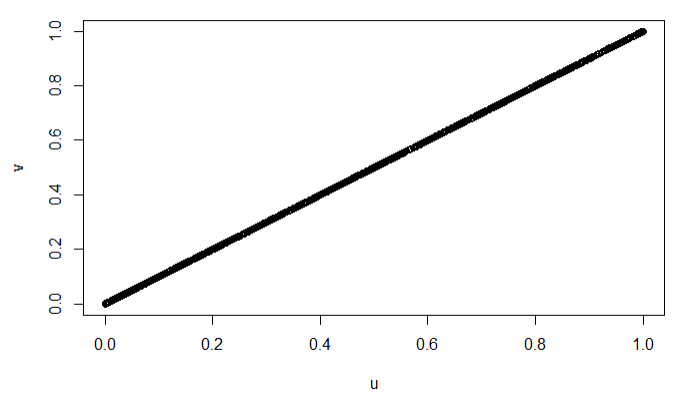


Рис. 1.6 – точечная диаграмма верхней границы Фреше-Хефдинга для 2000 наблюдений

На рисунках просматривается выполнение свойства 4, приведённого в предыдущем разделе. В частности, видно, что значения очень сильно зависят друг от друга, т.е. можно сделать предположение о линейной зависимости.

Для копулы независимости используется функция *indepCopula*. На рис. 1.7-1.9 представлены аналогичные графики для данной копулы.

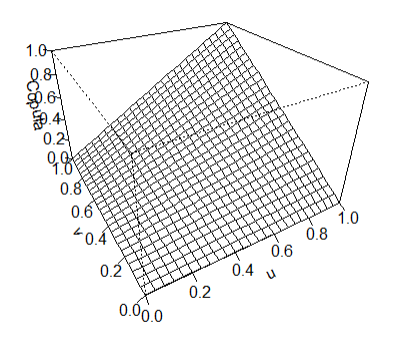
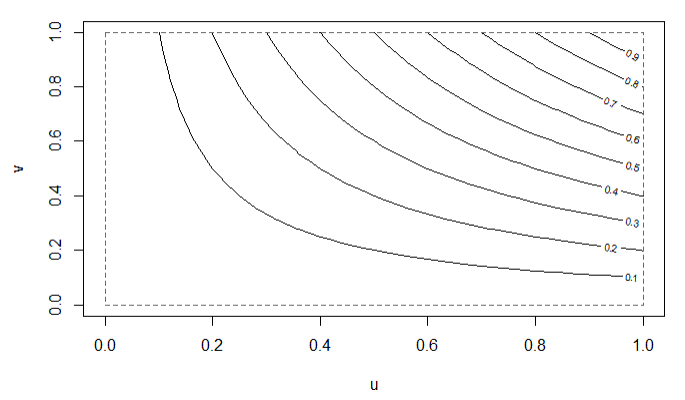
 

Рис. 1.7-1.8 – распределение и линии уровня копулы независимости

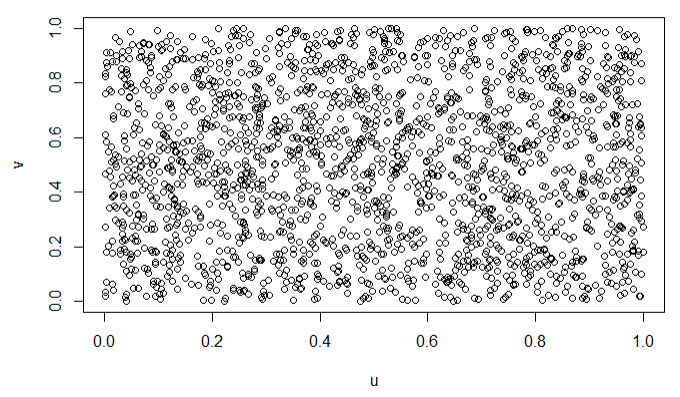


Рис. 1.9 – точечная диаграмма копулы независимости для 2000 наблюдений

График точечной диаграммы для копулы независимости хорошо иллюстрирует выполнение свойства 3, приведённое в предыдущем разделе. Значения на графике распределены по всей плоскости, соответственно видимой зависимости между значениями не наблюдается.

Глава 2. Типы копул

В основном копулы разделяются на семейства по способу их построения, поэтому известных видов копул на данный момент, вообще говоря, много. Их можно найти в соответствующей литературе [7]. Здесь же в подробностях рассмотрим наиболее используемые копулы. Существуют три основных типа копул: эллиптические, архимедовы и экстремальные.

2.1 Эллиптические копулы

Копулы, соответствующие эллиптическому распределению, называют *эллиптическими*. Одно из преимуществ эллиптических копул по сравнению с архимедовыми, которые определим далее, заключается в том, что они могут указать корреляцию между каждой парой одномерных маргинальных распределений. Наиболее популярными эллиптическими копулами являются гауссовская копула и -копула Стьюдента.

2.1.1 Гауссовская копула

Пусть – симметрическая, положительно определённая матрица, диагональные элементы которой равны 1, – одномерная функция распределения стандартного нормального закона, а – -мерная функция нормального распределения с математическим ожиданием 0 и корреляционной матрицей . Тогда -мерной *гауссовской копулой* называется копула вида [3, с. 5]:

Теперь рассмотрим . Матрица запишется в виде:

где . Тогда двумерную гауссовскую копулу можно записать как [8, с. 119]:

Здесь функция – обратная к функции распределения стандартного нормального закона, – параметр копулы.

В языке R гауссовская копула задаётся с помощью функции *normalCopula*. На рис. 2.1-2.3 представлены графики плотности распределения, линий уровня и точечная диаграмма для данной копулы при параметре .

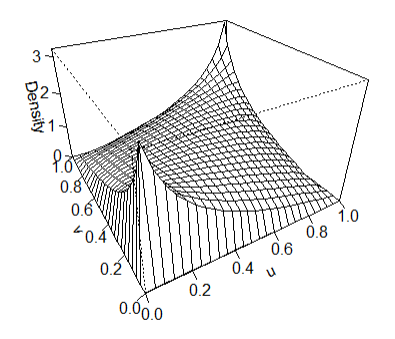
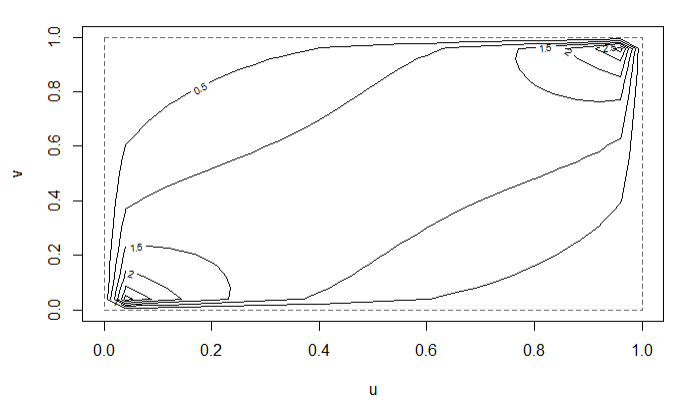
 

Рис. 2.1-2.2 – плотность и линии уровня гауссовской копулы с параметром

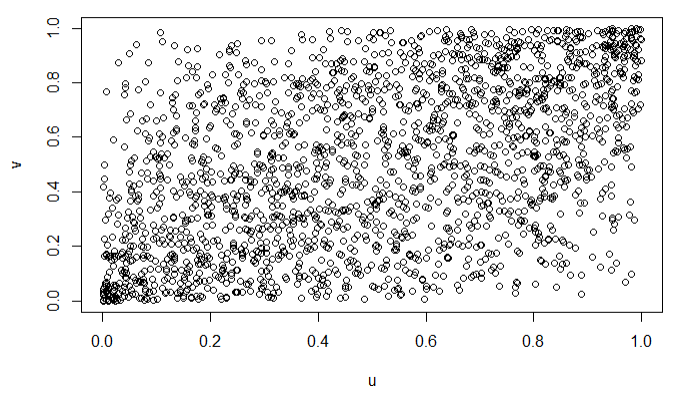


Рис. 2.3 – точечная диаграмма гауссовской копулы с параметром для 2000 наблюдений

2.1.2 t-копула Стьюдента

Пусть – симметрическая, положительно определённая матрица, диагональные элементы которой равны 1, – одномерная функция распределения Стьюдента с степенями свободы, а – -мерная функция нестандартизированного распределения Стьюдента с математическим ожиданием 0, корреляционной матрицей и степенями свободы . Тогда -мерной *-копулой Стьюдента* называется копула вида [3, с. 6]:

Снова рассмотрим . Матрица запишется в виде (14). Тогда двумерную-копулу Стьюдента можно записать следующим образом [8, с. 119]:

Здесь функция – обратная к функции одномерного -распределения Стьюдента с степенями свободы, – параметр копулы.

В языке R -копула Стьюдента задаётся с помощью функции *tCopula*. На рис. 2.4-2.6 представлены графики плотности распределения, линий уровня и точечная диаграмма для данной копулы при параметре и со степенями свободы .

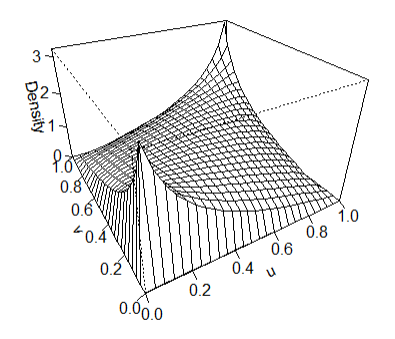
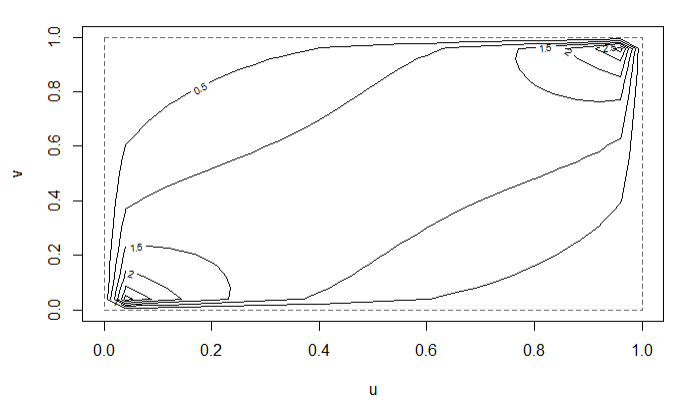
 

Рис. 2.4-2.5 – плотность и линии уровня -копулы Стьюдента с параметром и степенями свободы

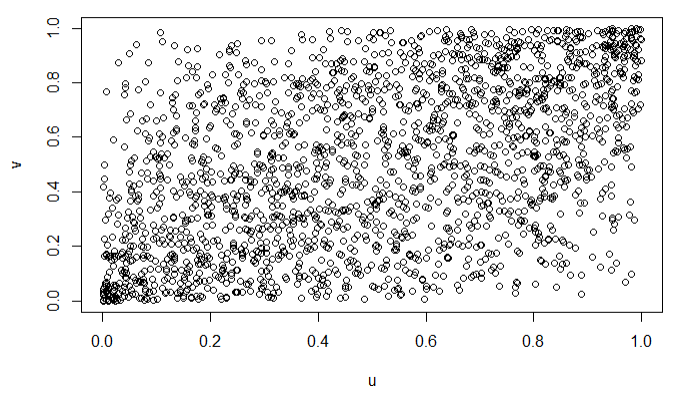


Рис. 2.6 – точечная диаграмма -копулы Стьюдента с параметром и степенями свободы для 2000 наблюдений

2.2 Архимедовы копулы

Архимедовы копулы находят широкое применение по ряду причин: легкость, с которой они могут быть построены; большое разнообразие семейств копул, принадлежащих этому классу; многие полезные свойства, которыми обладают члены этого класса копул.

*Архимедову копулу* в общем виде записывают следующим образом:

где – параметр копулы, а – функция-генератор копулы, которая удовлетворяет следующим условиям [4, с. 4]:

1. .
2. .
3. Функция строго убывает на, т.е. для .
4. Функция выпукла на, т.е. для .

Рассмотрим три наиболее часто встречающихся примера архимедовых копул.

2.2.1 Копула Франка

Функция-генератор для копулы Франка имеет вид:

где параметр .

Тогда двумерная копула Франка записывается в виде:

В языке R копула Франка задаётся с помощью функции *frankCopula*. На рис. 2.7-2.9 представлены графики плотности распределения, линий уровня и точечная диаграмма для данной копулы при параметре .

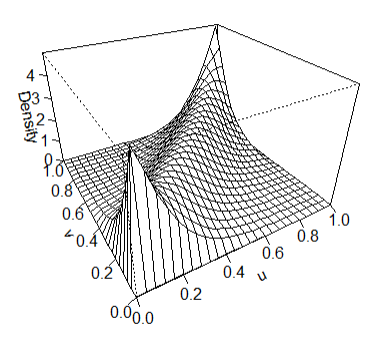
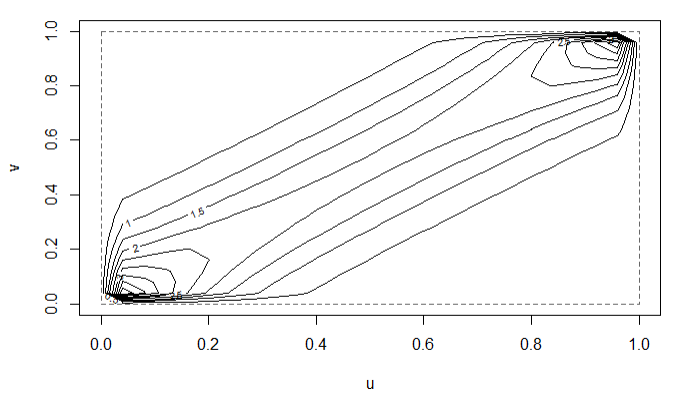
 

Рис. 2.7-2.8 – плотность и линии уровня копулы Франка с параметром

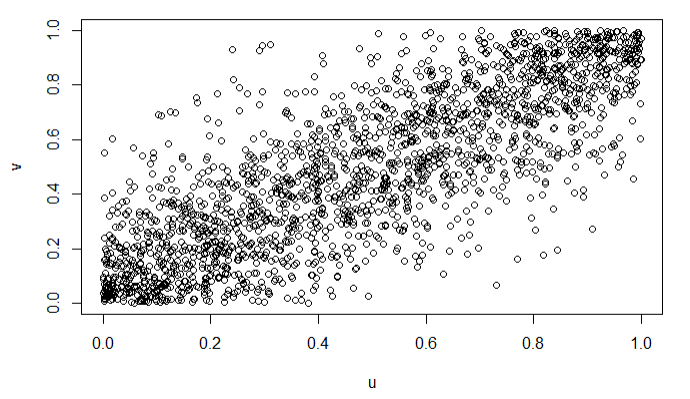


Рис. 2.9 – точечная диаграмма копулы Франка с параметром для 2000 наблюдений

Копула Франка позволяет моделировать данные с положительной и отрицательной зависимостью. Большие положительные и отрицательные значения указывают на высокую зависимость, а подразумевает полную независимость. Копула Франка подходит для моделирования двух наборов данных с одинаковыми динамическими характеристиками.

2.2.2 Копула Клейтона

Функция-генератор для копулы Клейтона имеет вид:

где параметр .

Двумерная копула Клейтона записывается в виде:

В языке R копула Клейтона задаётся с помощью функции *claytonCopula*. На рис. 2.10-2.12 представлены графики плотности распределения, линий уровня и точечная диаграмма для данной копулы при параметре .

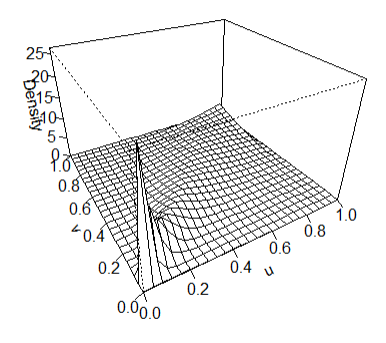
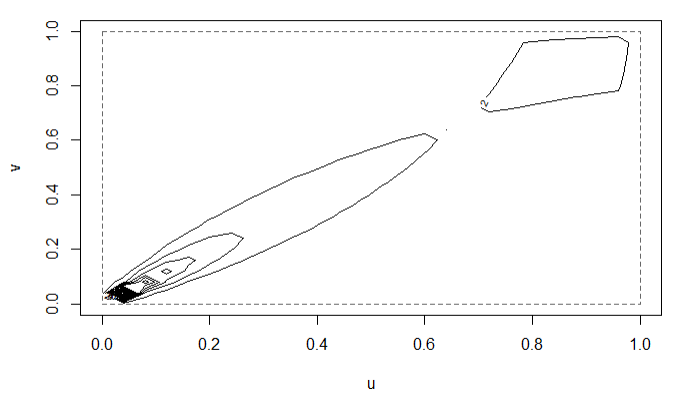
 

Рис. 2.10-2.11 – плотность и линии уровня копулы Клейтона с параметром

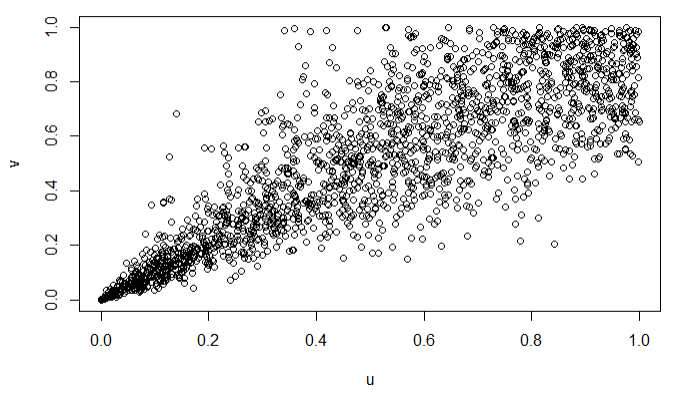


Рис. 2.12 – точечная диаграмма копулы Клейтона с параметром для 2000 наблюдений

Из рисунков 2.10-2.12 видно, что копула Клейтона указывает на более высокую зависимость в нижнем хвосте, чем в верхнем. Чем больше , тем сильнее зависимость случайных величин.

2.2.3 Копула Гумбеля

Функция-генератор для копулы Гумбеля имеет вид:

где параметр .

Двумерная копула Гумбеля записывается в виде:

В языке R копула Гумбеля задаётся с помощью функции *gumbelCopula*. На рис. 2.13-2.15 представлены графики плотности распределения, линий уровня и точечная диаграмма для данной копулы при параметре .

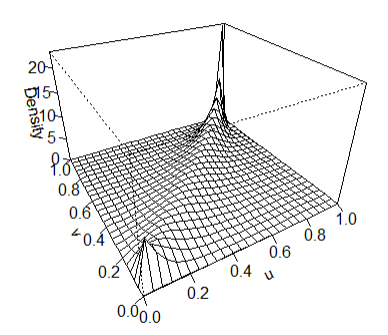
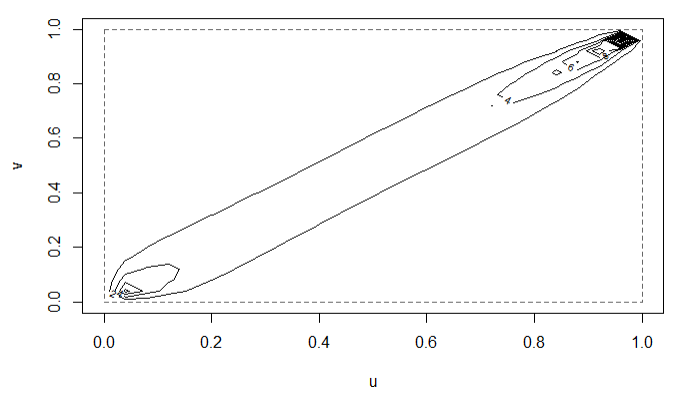
 

Рис. 2.13-2.14 – плотность и линии уровня копулы Гумбеля с параметром

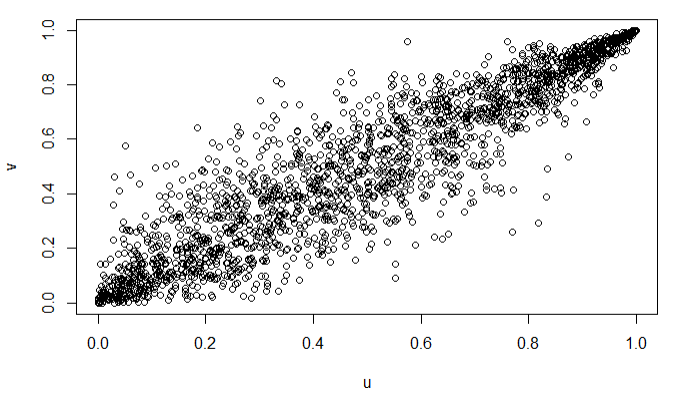


Рис. 2.15 – точечная диаграмма копулы Гумбеля с параметром для 2000 наблюдений

Из рисунков 2.13-2.15 видно, что копула Гумбеля, в отличие от копулы Клейтона, указывает на более высокую зависимость в верхнем хвосте, чем в нижнем. Чем больше , тем сильнее зависимость случайных величин в верхнем хвосте.

2.3 Экстремальные копулы

Копула называется *экстремальной*, если существует такая копула , что:

для любых .

*Теорема*. Копула является экстремальной тогда и только тогда, когда:

для любых и любого (множество натуральных чисел).

Для -мерных копул справедливы аналогичные утверждения [2, с. 128-129].

Примерами экстремальных копул являются верхняя граница Фреше-Хефдинга и копула независимости, приведённые в (5) и (8) соответственно.

Экстремальные копулы являются подходящим инструментом для моделирования структуры зависимости между редкими событиями. Данные копулы часто находят своё применение в теории экстремальных событий, откуда и получили своё название. Также они подходят и для моделирования обычных структур с положительной зависимостью.

Заключение

В проекте были рассмотрены основные элементы теории копул и их свойства. В частности, рассмотрен способ представления зависимости между показателями в виде копул. Данное представление оказывается удобнее, чем использование совместных функций распределений изучаемых показателей. Это обусловлено тем, что, с одной стороны, в копулах выделены маргинальные распределения показателей, что, конечно же, играет важную роль при исследовании реальных совокупностей, а с другой – выделена структура зависимости между найденными маргинальными распределениями.

Были построены наиболее часто используемые копулы, их вид и графики распределения, которые помогли выделить особенности различных типов копул, в каких случаях они применяются и для каких данных. Для этого использовался язык R и соответствующий пакет языка.

Стоит отметить, что копулы активно применяются для управления финансовыми рисками, поскольку позволяют не только определять совместное распределение с помощью частных (маргинальных) функций и вида взаимосвязи, но и позволяют моделировать неэллипсообразные многомерные распределения.

Список Использованных источников

1. Nelson, Roger B. An Introduction to Copulas / Roger B. Nelson. – Second Edition. – Springer, New York, 2006. – 270 с.
2. Copula Theory and Its Applications / Piotr Jaworski [и др.]. – Springer, Berlin, 2010. – 327 с.
3. Haugh Martin An Introduction to Copulas / Martin Haugh. – Springer, 2016. – 21 с.
4. Melchiori, Mario R. Which Archimedean Copula is the Right One? / Mario R. Melchiori. – YieldCurve, 2003. – 21 с.
5. Elements of Copula Modeling with R / Marius Hofert [и др.]. – Springer, 2018. – 267 с.
6. Cherubini Umberto, Luciano Elisa, Vecchiato Walter Copula Methods in Finance/ U. Cherubini, E. Luciano, W. Vecchiato. – John Wiley & Sons, Ltd*,* 2004. – 293 с.
7. Durante Fabrizio, Sempi Carlo Principles of Copula Theory / Fabrizio Durante, Carlo Sempi. – Chapman & Hall, 2021. – Chapter 6: A compendium of families of copulas. – С. 189-214.
8. Благовещенский, Ю.Н. Основные элементы теории копул / Ю.Н. Благовещенский // Прикладная эконометрика, научные статьи: сб. науч. стат. / Г.И. Пеникас [и др.]. – Синергия, 2012. – С. 113-130.
9. Щетинин, Е.Ю. О методах количественного анализа финансовых показателей компании в условиях высокой рискованности инвестиций / Е.Ю. Щетинин // Управление финансовыми рисками. — 2020. — № 2.— С.108–119.
10. Кудрявцев, А.А., Радионов, А.В. Введение в количественный риск-менеджмент: учебник / А.А. Кудрявцев, А.В. Радионов. – Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2016. — 192 с.
11. How to fit a copula model in R. Part 1: basic tools. [Электр. ресурс] / Mic. – R-bloggers, 2016. – Режим доступа: <https://www.r-bloggers.com/2016/03/how-to-fit-a-copula-model-in-r-heavily-revised-part-1-basic-tools/>. – Дата доступа: 09.12.2022.